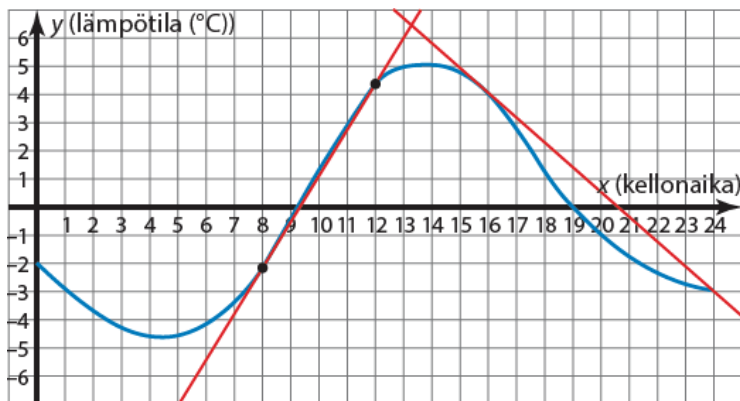


3.1



a) $k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4,4 - (-2,1)}{12 - 8} = \frac{6,5}{4} \approx 1,6 \text{ (}^{\circ}\text{C/h)}$

Aikavälillä klo 8–12 lämpötila nousee keskimäärin $1,6 \text{ }^{\circ}\text{C/h}$.

b) $k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-3,0 - 4,1}{24 - 16} = \frac{-7,1}{8} \approx -0,9 \text{ (}^{\circ}\text{C/h)}$

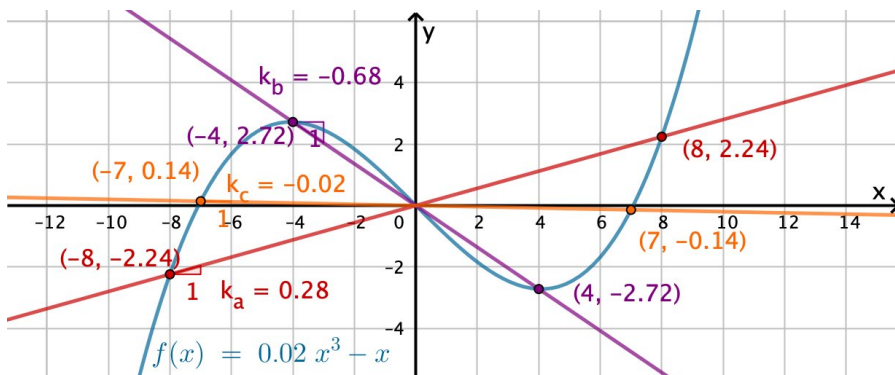
Aikavälillä klo 16–24 lämpötila laskee keskimäärin $0,9 \text{ }^{\circ}\text{C/h}$.

Vastaus

a) $1,6 \text{ }^{\circ}\text{C/h}$

b) $-0,9 \text{ }^{\circ}\text{C/h}$

3.2



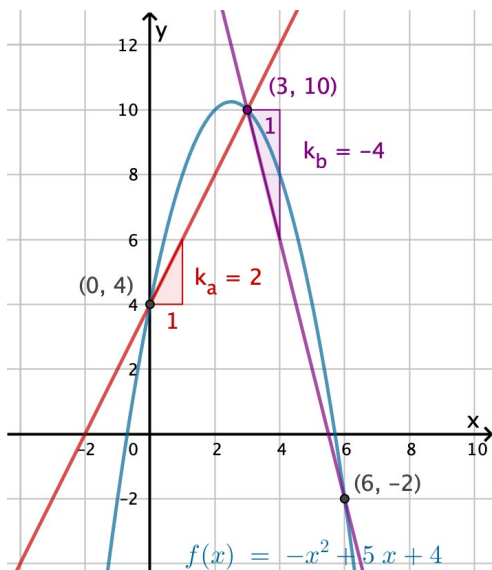
Määritetään funktion kuvaajalle piirettyjen sekanttien kulmakertoimet annetuilla väleillä.

- Välillä $-8 \leq x \leq 8$ funktion arvojen keskimääräinen muutosnopeus on 0,28.
- Välillä $-4 \leq x \leq 4$ funktion arvojen keskimääräinen muutosnopeus on -0,68.
- Välillä $-7 \leq x \leq 7$ funktion arvojen keskimääräinen muutosnopeus on -0,02.

Vastaus

- 0,28
- 0,68
- 0,02

3.3



Määritetään funktion kuvaajalle annetulle välille piirretyn sekantin kulmakerroin.

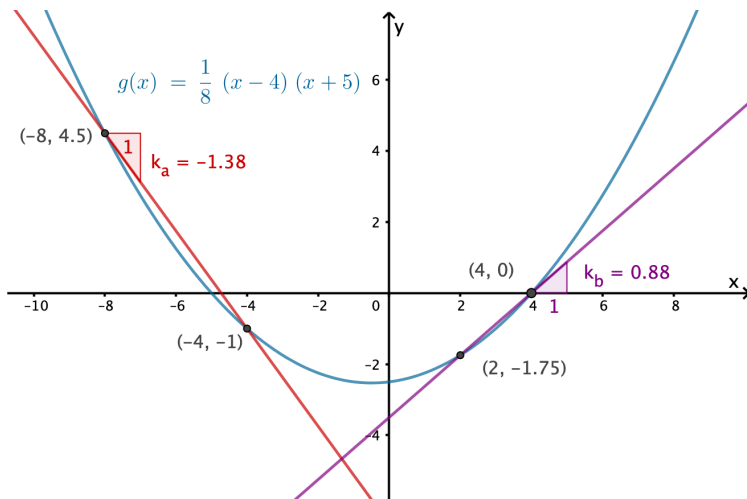
- a) Välillä $0 \leq x \leq 3$ funktion keskimääräinen muutosnopeus on 2.
- b) Välillä $3 \leq x \leq 6$ funktion keskimääräinen muutosnopeus on -4 .

Vastaus

a) 2

b) -4

3.4



Määritetään funktion kuvaajalle annetulle välille piirretyn sekantin kulmakerroin.

a) Välillä $-8 \leq x \leq -4$ funktion keskimääräinen muutosnopeus on $-1,38$.

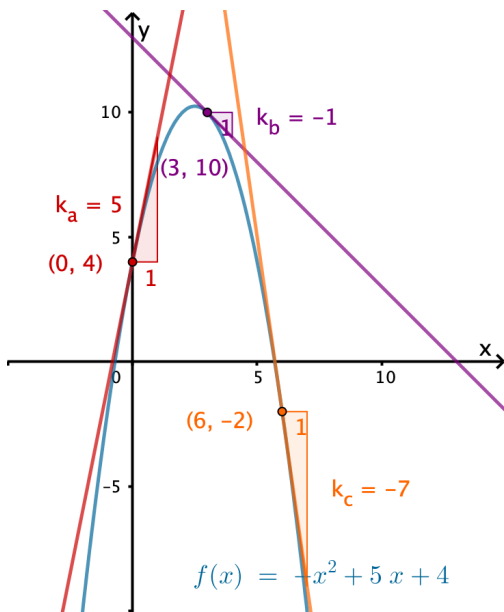
b) Välillä $2 \leq x \leq 4$ funktion keskimääräinen muutosnopeus on $0,88$.

Vastaus

a) $-1,38$

b) $0,88$

3.5



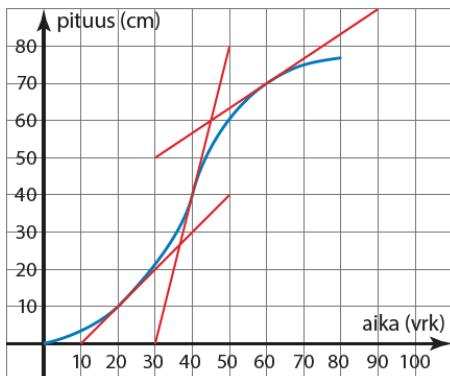
Määritetään funktion kuvaajalle annettuihin kohtiin piirrettyjen tangenttien kulmakertoimet.

- a) kohdassa $x = 0$ funktion hetkellinen muutosnopeus on 5.
- b) kohdassa $x = 3$ funktion hetkellinen muutosnopeus on -1 .
- c) kohdassa $x = 6$ funktion hetkellinen muutosnopeus on -7 .

Vastaus

- a) 5
- b) -1
- c) -7

3.6



Määritetään tangenttien kulmakeroimet.

a) Kohdassa $x = 20$ vrk kasvunopeus on

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{20 - 10}{30 - 20} = 1 \text{ (cm/vrk)}.$$

Kohdassa $x = 60$ vrk kasvunopeus on

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{70 - 50}{60 - 30} = \frac{20}{30} \approx 0,7 \text{ (cm/vrk)}.$$

b) Suurin kasvunopeus on kohdassa $x = 40$ vrk.

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{40 - 0}{40 - 30} = \frac{40}{10} = 4 \text{ (cm/vrk)}.$$

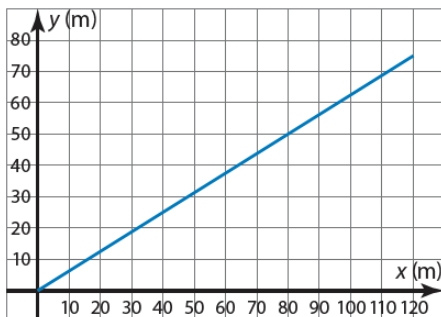
Vastaus

a) 20 vrk kuluttua 1 cm/vrk, 60 vrk kuluttua 0,7 cm/vrk

b) 4 cm/vrk

3.7

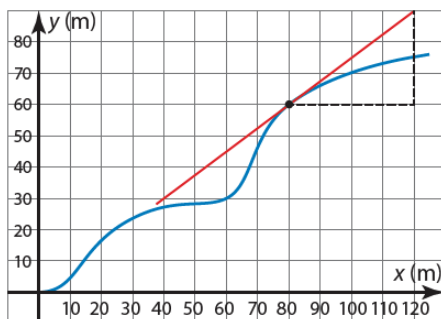
a)



Määritetään suoran kulmakerroin.

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{50 - 0}{80 - 0} = \frac{5}{8} \approx 0,63 = 63\%$$

b)



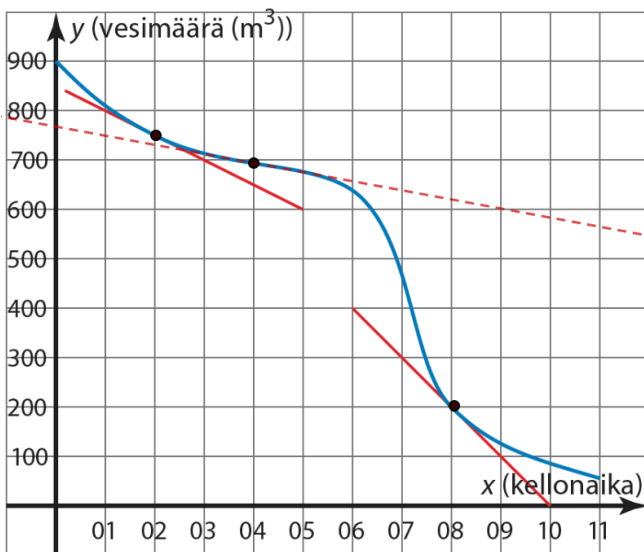
Määritetään kohtaan $x = 80$ piirretyn tangentin kulmakerroin.

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{90 - 60}{120 - 80} = \frac{3}{4} = 0,75 = 75\%$$

Vastaus

a) 63 % **b)** 75 %

3.8



a) Hetkellinen nopeus on tangentin kulmakerroin.

$$\text{klo 02: } k = \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{600 - 800}{5 - 1} = -\frac{200}{4} = -50 \text{ (m}^3/\text{h)}$$

Säiliö tyhjenee nopeudella $50 \text{ m}^3/\text{h}$.

$$\text{klo 08: } k = \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{0 - 400}{10 - 6} = -\frac{400}{4} = -100 \text{ (m}^3/\text{h)}$$

Säiliö tyhjenee nopeudella $100 \text{ m}^3/\text{h}$.

b) Käyrälle piirretty tangentti näyttäisi laskevan loivimmin klo 04.

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{600 - 700}{9 - 4} = -\frac{100}{5} = -20 \text{ (m}^3/\text{h)}$$

Klo 04 säiliö tyhjenee hitaimmin, nopeus on tällöin $20 \text{ m}^3/\text{h}$.

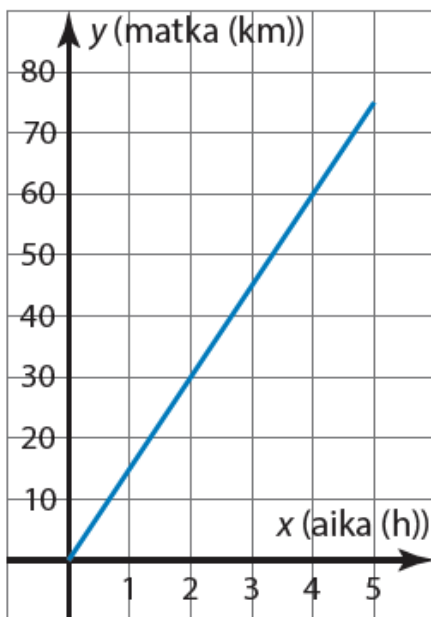
Säiliön tilavuus on 900 m^3 , tyhjeneminen kestää tällä hitaimmalla nopeudella noin $\frac{900 \text{ m}^3}{20 \text{ m}^3 / \text{h}} = 45 \text{ h}$.

Vastaus

- a) klo 02 $50 \text{ m}^3/\text{h}$ ja klo 08 $100 \text{ m}^3/\text{h}$
- b) kulutus pienimmillään $20 \text{ m}^3/\text{h}$ noin klo 4, täyden säiliön tyhjeneminen tällä nopeudella kestäisi 45 h.

3.9

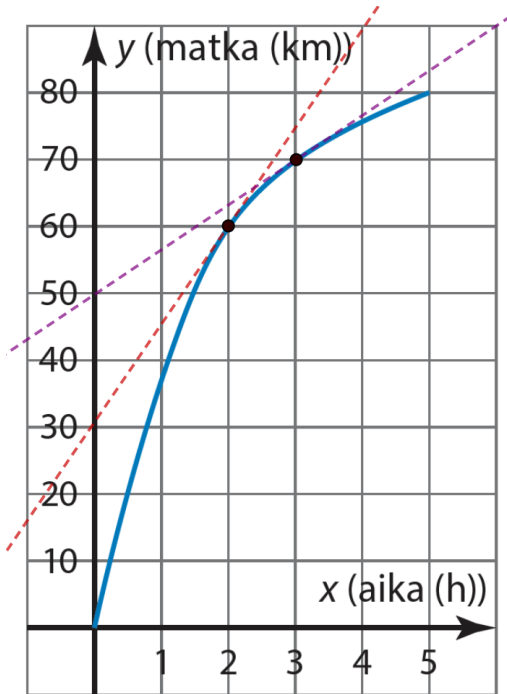
a)



Pyöräilijä ajaa tasaisella nopeudella. Nopeus on suoran kulmakerroin.

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{60 - 0}{4 - 0} = 15 \text{ (km/h)}$$

b)



Hetkellinen nopeus on tangentin kulmakerroin.

Nopeus 2 h kuluttua: $k = \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{90 - 60}{4 - 2} = 15 \text{ (km/h)}.$

Nopeus 3 h kuluttua: $k = \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{90 - 70}{6 - 3} \approx 7 \text{ (km/h)}.$

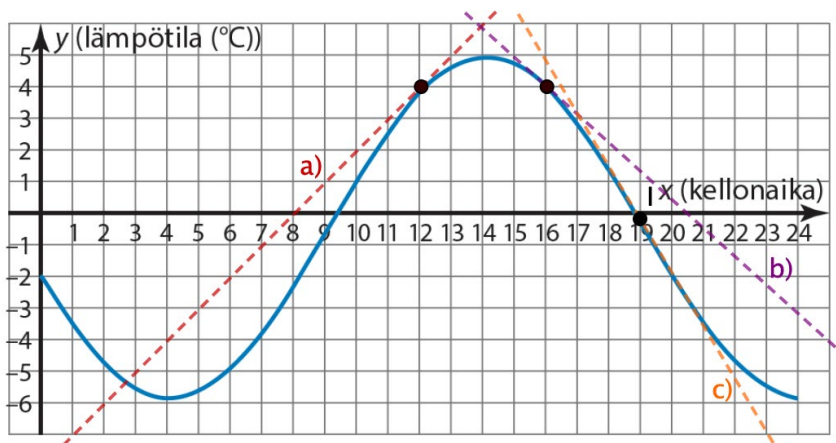
Vastaus

a) 15 km/h

b) 2 h kuluttua noin 15 km/h, 3 h kuluttua noin 7 km/h

3.10

Piirretään kuvaan tangentit ja määritetään niiden kulmakertoimet.



- a) Klo 12 lämpötila muuttui nopeudella $k = \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{4 - 0}{12 - 8} = 1,0 \text{ } ^\circ\text{C/h}$.
Lämpötila nousi nopeudella $1,0 \text{ } ^\circ\text{C/h}$.

- b) Klo 16 lämpötila muuttui nopeudella
 $k = \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{-3 - 4}{24 - 16} = -\frac{7}{8} \approx -0,9 \text{ } ^\circ\text{C/h}$.
Lämpötila laski nopeudella $0,9 \text{ } ^\circ\text{C/h}$.

- c) Tangentti näyttäisi laskevan jyrkimmin noin klo 19.

Klo 19 lämpötila muuttui nopeudella

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{-7 - (-0,2)}{23 - 19} = -\frac{6,8}{4} = -1,7 \text{ } ^\circ\text{C/h}.$$

Klo 19 lämpötila laski nopeudella $1,7 \text{ } ^\circ\text{C/h}$.

Vastaus

a) $1,0\text{ }^{\circ}\text{C/h}$

b) $0,9\text{ }^{\circ}\text{C/h}$

c) noin klo 19, nopeudella $1,7\text{ }^{\circ}\text{C/h}$

3.11

Lasketaan kuvaan piirretyn sekantin kulmakerroin.

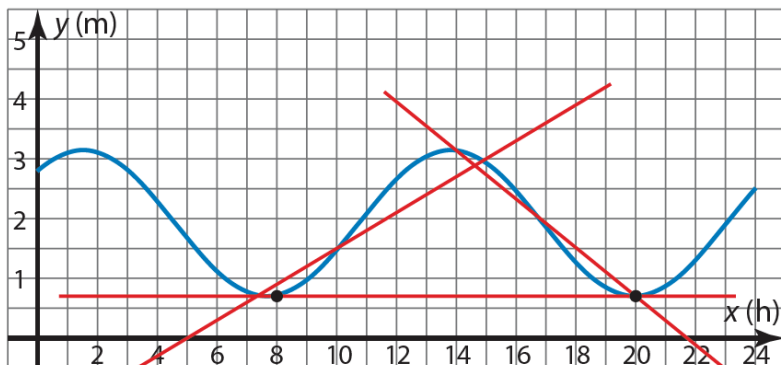
$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(5) - f(3)}{5 - 3} = \frac{(5^2 - 5 + 1) - (3^2 - 3 + 1)}{2} = \frac{21 - 7}{2} = \frac{14}{2} = 7$$

Keskimääräinen muutosnopeus välillä $3 \leq x \leq 5$ on 7.

Vastaus

7

3.12



Määritetään sekanttien kulmakertoimet.

a) klo 10–15: $k = \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{3 - 1,5}{15 - 10} = \frac{1,5}{5} = 0,3 \text{ (m/h)}$

Muuttui keskinopeudella 0,3 m/h.

b) klo 14–20: $k = \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{0,7 - 3,2}{20 - 14} = \frac{1,5}{5} = -0,4 \text{ (m/h)}$

Muuttui keskinopeudella -0,4 m/h.

c) klo 8–20: $k = \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{0,7 - 0,7}{20 - 8} = \frac{0}{12} = 0 \text{ (m/h)}$

Muuttui keskinopeudella 0 m/h.

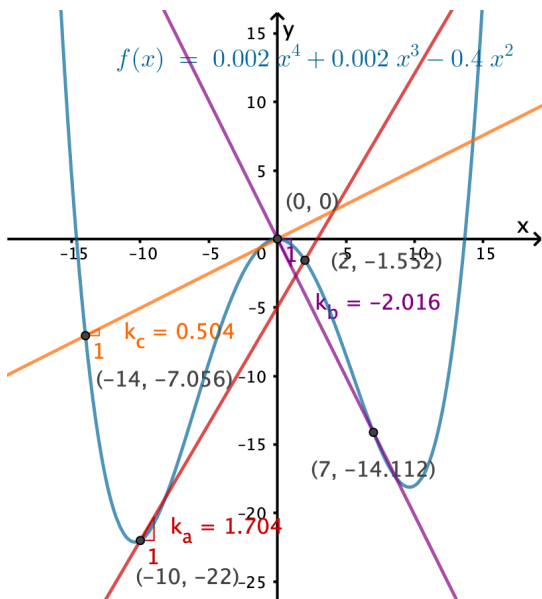
Vastaus

a) 0,3 m/h

b) -0,4 m/h

c) 0 m/h

3.13



Määritetään sekanttien kulmakertoimet.

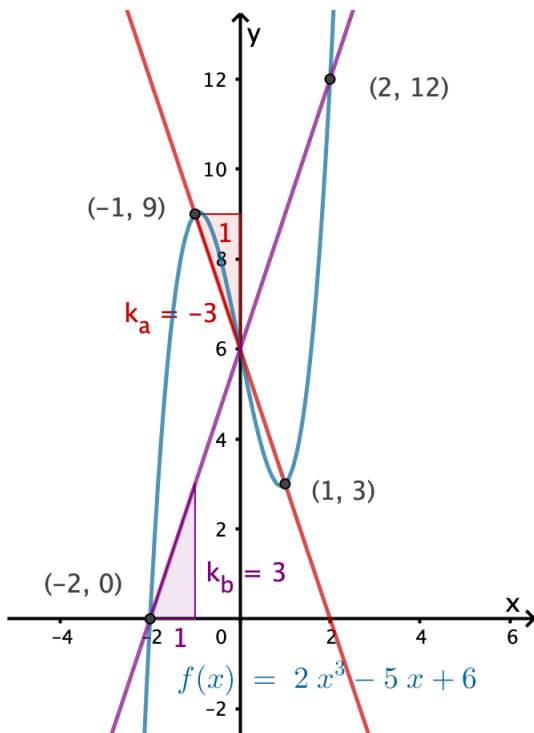
- a) Keskimääräinen muutosnopeus välillä $-10 \leq x \leq 2$ on 1,7.
- b) Keskimääräinen muutosnopeus välillä $0 \leq x \leq 7$ on -2,0.
- c) Keskimääräinen muutosnopeus välillä $-14 \leq x \leq 0$ on 0,5.

Vastaus

- a) 1,7
- b) -2,0
- c) 0,5

3.14

Piirretään sekantit ja määritetään niiden kulmakertoimet.



a) Keskimääräinen muutosnopeus välillä $-1 \leq x \leq 1$ on -3 .

b) Keskimääräinen muutosnopeus välillä $-2 \leq x \leq 2$ on 3 .

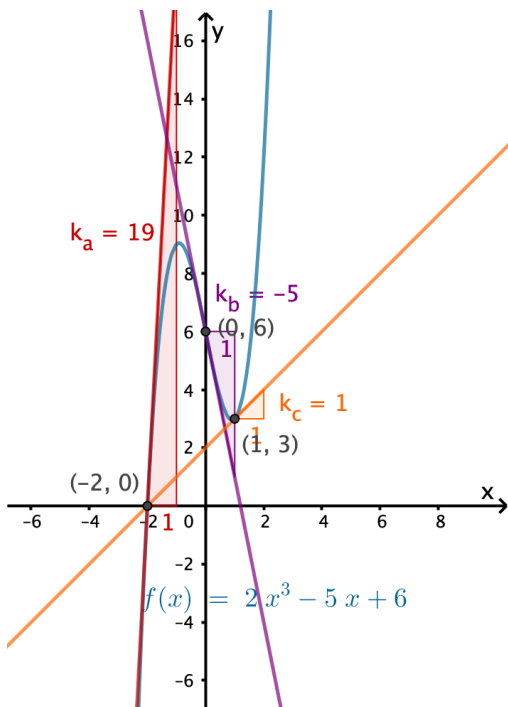
Vastaus

a) -3

b) 3

3.15

Piirretään tangentit ja määritetään niiden kulmakertoimet.



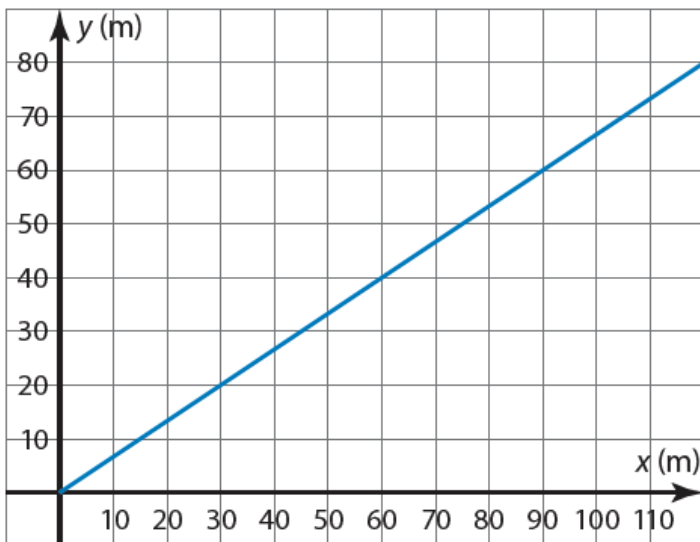
- a) Hetkellinen muutosnopeus kohdassa $x = -2$ on 19.
- b) Hetkellinen muutosnopeus kohdassa $x = 0$ on -5 .
- c) Hetkellinen muutosnopeus kohdassa $x = 1$ on 1.

Vastaus

- a) 19
- b) -5
- c) 1

3.16

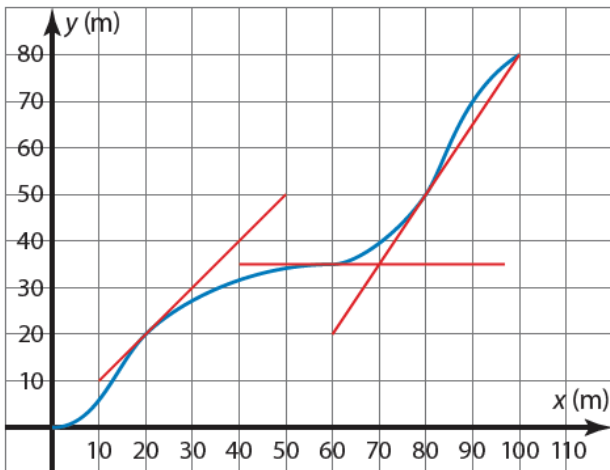
a) Määritetään suoran kulmakerroin.



$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{60 - 0}{90 - 0} = \frac{6}{9} \approx 0,67 = 67 \%$$

Rinteen jyrkkyys on 67 %.

b) Määritetään tangenttien kulmakertoimet.



20 m:n päässä: $k = \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{40 - 20}{40 - 20} = 1 = 100 \%$

Rinteen jyrkkyys on 100 %.

60 m:n päässä: $k = \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{50 - 50}{80 - 60} = 0 = 0 \%$

Rinteen jyrkkyys on 0 %.

80 m:n päässä: $k = \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{80 - 20}{100 - 60} = \frac{60}{40} = 1,5 = 150 \%$

Rinteen jyrkkyys on 150 %.

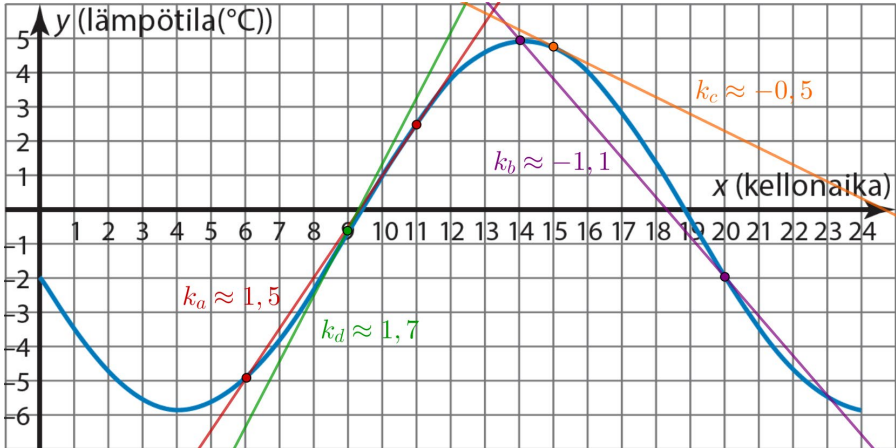
Vastaus

a) 67 %

b) 20 m:n päässä 100 %,
60 m:n päässä 0 % ja
80 m:n päässä 150 %

3.17

Piirretään kuvaan tarvittavat sekantit ja tangentit sekä määritetään niiden kulmakertoimet.



- a) Keskimääräinen muutosnopeus on sekantin kulmakerroin.

Aikavälillä klo 6–11 lämpötila muuttui keskimäärin nopeudella $1,5\text{ }^{\circ}\text{C/h}$.

- b) Keskimääräinen muutosnopeus on sekantin kulmakerroin.

Aikavälillä klo 14–20 lämpötila muuttui keskimäärin nopeudella $-1,1\text{ }^{\circ}\text{C/h}$.

- c) Hetkellinen muutosnopeus on tangentin kulmakerroin.

Klo 15 lämpötila muuttui nopeudella $-0,5\text{ }^{\circ}\text{C/h}$.

- d) Hetkellinen muutosnopeus on tangentin kulmakerroin.

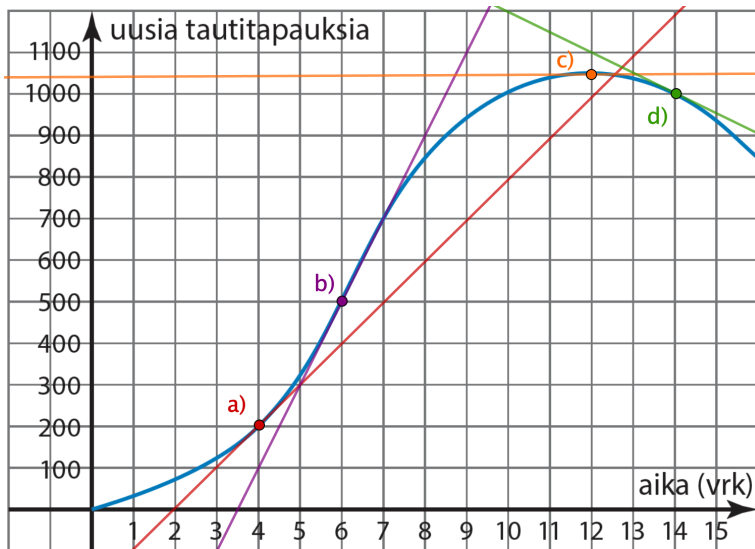
Tangentti näyttäisi nousevan jyrkimmin noin klo 9.

Klo 9 lämpötila muuttui nopeudella $1,7\text{ }^{\circ}\text{C/h}$.

Vastaus

- a)** $1,5\text{ }^{\circ}\text{C/h}$
- b)** $-1,1\text{ }^{\circ}\text{C/h}$
- c)** $-0,5\text{ }^{\circ}\text{C/h}$
- d)** noin klo 9, nousi nopeudella $1,7\text{ }^{\circ}\text{C/h}$

3.18



Hetkellinen muutosnopeus on tangentin kulmakerroin. Määritetään tangenttien kulmakertoimet.

a) 4 vrk:n kuluttua: $k = \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{400 - 200}{6 - 4} = 100 \text{ (tap/vrk)}.$

Tapausten määrä kasvoi 100 tapausta/vrk.

b) Käyrälle piirretty tangentti näyttäisi nousevan jyrkimmin noin 6 vrk:n kuluttua: $k = \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{900 - 500}{8 - 6} = 200 \text{ (tap/vrk)}.$

Tapausten määrä kasvoi tällöin noin 200 tapausta/vrk.

c) Tangentti oli vaakasuora noin 12 vrk:n kuluttua, tämän jälkeen tangentti oli laskeva. Tapausten määrä alkoi siis vähentyä 12 vrk:n kuluttua.

d) 14 vrk:n kuluttua: $k = \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{900 - 1000}{16 - 14} = -50 \text{ (tap/vrk)}.$

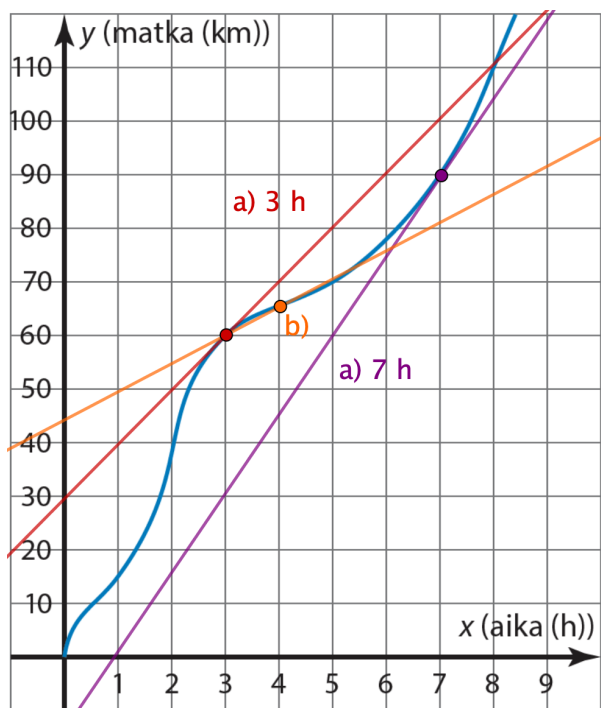
Tapausten määrä väheni 50 tapausta/vrk.

Vastaus

- a) 100 tapausta/vrk
- b) noin 6 vrk:n kuluttua, noin 200 tapausta/vrk
- c) 12 vrk:n kuluttua
- d) väheni noin 50 tapausta/vrk

3.19

Hetkellinen nopeus on tangentin kulmakerroin. Piirretään tarvittavat tangentit ja lasketaan niiden kulmakertoimet.



a) 3 h kuluttua lähdöstä: $k = \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{80 - 60}{5 - 3} = \frac{20}{2} = 10 \text{ (km/h)}.$

7 h kuluttua lähdöstä: $k = \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{90 - 60}{7 - 5} = \frac{30}{2} = 15 \text{ (km/h)}.$

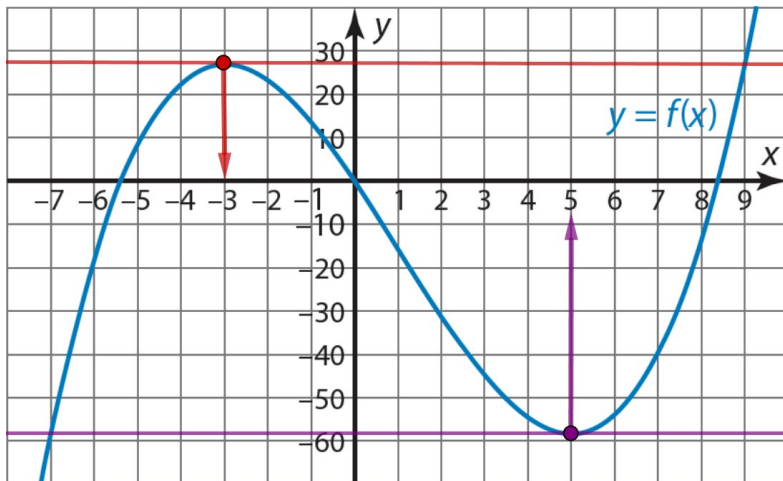
b) Käyrälle piirretty tangentti näyttäisi nousevan loivimmin, kun lähdöstä on kulunut noin 4 h: $k = \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{85 - 65}{8 - 4} = \frac{20}{4} = 5 \text{ (km/h)}$

Vastaus

a) 10 km/h ja 15 km/h

b) noin 4 tunnin kuluttua, 5 km/h

3.20



Funktion arvojen muutosnopeus on nolla kohdissa $x = -3$ ja $x = 5$.

Kohdissa, joissa muutosnopeus on nolla, tangentti on vaakasuora.

Kuvaajassa on tällöin ”mäenharja” tai ”kuopan pohja”.

Vastaus

$x = -3$ ja $x = 5$

Kohdissa, joissa muutosnopeus on nolla, tangentti on vaakasuora.

Kuvaajassa on tällöin ”mäenharja” tai ”kuopan pohja”.

3.21

$$f(x) = -x^2 + 4x + 7$$

a) Lasketaan sekantin kulmakerroin.

$$\begin{aligned} k &= \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} \\ &= \frac{(-4^2 + 4 \cdot 4 + 7) - (-1^2 + 4 \cdot 1 + 7)}{3} \\ &= \frac{7 - 10}{3} \\ &= \frac{-3}{3} \\ &= -1 \end{aligned}$$

Funktion arvojen keskimääräinen muutosnopeus välillä $1 \leq x \leq 4$ on -1 .

b) Hetkellinen muutosnopeus on nolla kohdassa, jossa tangentin kulmakerroin on nolla eli tangentti on vaakasuora. Funktion f kuvaaja on paraabeli, ja ainoa kohta, jossa tangentti on vaakasuora, on paraabelin huippu. Määritetään paraabelin huipun x -koordinaatti.

Tapa 1:

Ratkaistaan paraabelin huipun x -koordinaatti symmetrian avulla

Paraabelin huippu on funktion f nollakohtien puolivälissä, eli huipun x -koordinaatti saadaan laskemalla nollakohtien keskiarvo.

Ratkaistaan funktion f nollakohdat.

$$f(x) = 0$$

$$-x^2 + 4x + 7 = 0$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 7}}{2 \cdot (-1)}$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 28}}{-2}$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{44}}{-2}$$

$$x = \frac{-4 + \sqrt{44}}{-2} \quad \text{tai} \quad x = \frac{-4 - \sqrt{44}}{-2}$$

Lasketaan huipun x -koordinaatti x_0 eli nollakohtien keskiarvo.

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{\frac{-4 + \sqrt{44}}{-2} + \frac{-4 - \sqrt{44}}{-2}}{2} \\ &= \frac{\frac{-4 + \sqrt{44} + (-4 - \sqrt{44})}{-2}}{2} \\ &= \frac{\frac{-4 + \sqrt{44} - 4 - \sqrt{44}}{-2}}{2} \\ &= \frac{\frac{-8}{-2}}{2} \\ &= \frac{4}{2} = 2 \end{aligned}$$

Hetkellinen muutosnopeus on nolla kohdassa $x = 2$.

Tapa 2:

Ratkaistaan paraabelin huipun x -koordinaatti kaavan avulla.

$$f(x) = -x^2 + 4x + 7$$

Paraabelin $y = -x^2 + 4x + 7$ huipun x -koordinaatti on

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \cdot (-1)} = -\frac{4}{-2} = 2$$

Hetkellinen muutosnopeus on nolla kohdassa $x = 2$.

Vastaus

a) -1

b) $x = 2$